

1970.

P. G. Reinhard.

QUANTENELEKTRODYNAMIK STARKER FELDER

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Johann - Wolfgang - Goethe - Universität

zu

Frankfurt am Main

Vorgelegt von

Paul-Gerhard Reinhard

aus

Lohr am Main

DEPARTMENT OF AGRICULTURE

Technical - Division

and

Division of Entomology

and

Department of Agriculture

and

Division of Entomology - Division of Agriculture



Division of Entomology

Division of Entomology

Division of Entomology

and

Division of Entomology

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main.

Dekan:	Prof.Dr.G.Schneider
Leiter der Arbeit:	Prof.Dr.W.Greiner
Erstgutachter:	Prof.Dr.W.Greiner
Zweitgutachter:	Prof.Dr.P.Fulde

Tag der mündlichen Prüfung: 3. 7. 1970

Digitized by the Internet Archive
in 2026

INHALTSVERZEICHNIS

I. Einführung	- 1 -
II. Feldtheoretische Grundlagen	- 6 -
III. Näherung durch eine selbstkonsistente Gleichung	- 13 -
IV. Separation der Drehimpulswellenfunktionen	- 21 -
V. Renormierungsprobleme	- 27 -
VI. Zusammenfassung	- 49 -

I. Einführung

Die mögliche Existenz stabiler Kerne in der Gegend der Kernladungszahlen $Z=114$ und $Z=164$ ¹⁾ hat in letzter Zeit immer stärkeres Interesse gefunden. Solche Kerne sind aber nicht nur für die Kernphysik von Interesse. Auch in der Physik ihrer Elektronenhülle führen sie zu neuen Problemen. Sie sind nämlich Quellen sehr starker elektrischer Felder, bei denen die bisherigen Methoden zur theoretischen Beschreibung äußerer Felder nicht mehr geeignet sind.

Die Behandlung von Elektronen in äußeren Feldern schränkt man in der Quantenfeldtheorie üblicherweise auf solche Felder ein, bei denen der Energiegap gegenüber dem Spektrum der freien Elektronen nicht zu stark geändert wird; d.h. bei denen im Energiespektrum immer noch ein deutlicher Gap zwischen den Lösungen positiver und denen negativer Energie verbleibt, damit der Grundzustand eindeutig definiert werden kann durch "Auffüllen" aller negativen Energiezustände. Ein Beispiel für ein sehr starkes äußeres Feld, eine Potentialstufe größer als $2mc^2$, wird beim Kleinschen Paradoxon ⁶⁾ betrachtet. In diesem Falle erhält man keinen stabilen Grundzustand mehr, sondern an der Potentialstufe werden laufend Teilchen-Loch-Paare erzeugt. Beck et al ⁷⁾ haben gezeigt, daß sich im Falle eines äußeren Potentials, bei dem nur ein diskretes Spektrum gebundener Zustände im

Energiegap des freien Spektrums liegt, ein stabiler Grundzustand definieren läßt. Das geht folgendermaßen vor ^{7,8)}: Wenn man die Dirac-Gleichung für ein zeitunabhängiges sphärisches elektrisches Feld löst, erhält man ein Spektrum von Kontinuumswellenfunktionen mit Energien von $-\infty$ bis $-mc^2$ und von $+mc^2$ bis $+\infty$, dazu noch einige gebundene Zustände mit Energien zwischen $-mc^2$ und $+mc^2$. Mit diesem System von Spinorwellenfunktionen $\{ \bar{\Phi}_q(x) \}$ definiert man einen Erzeugungsoperator für ein Elektron im Zustand q

$$(1a) \quad a_q^+ = \int dx \bar{\Phi}_q(x) \Psi^+(x)$$

dabei ist $\psi^+(x)$ der Feldoperator für die Elektronen. Den Grundzustand definiert man dann indem man eine Fermi-Kante F einführt und die Zustände unterhalb dieser Fermi-Kante F für bereits mit Elektronen besetzt erklärt.

$$(1b) \quad a_q |0\rangle = 0 \quad q > F, \quad a_q^+ |0\rangle = 0 \quad q < F$$

Die Konstruktion aller anderen Zustandsvektoren des Systems geschieht, wie üblich, durch Anwendung der Operatoren von Gl. (1a) auf den Grundzustand in Gl. (1b). In Figur 1 ist eine typische Feldstärkeabhängigkeit des Spektrums aufgetragen⁸⁾. Im feldfreien Fall oder bei nur schwachen äußeren Feldern (Gebiet A) sieht man ganz klar den großen Gap zwischen dem oberen Ende des unteren Kontinuums und dem niedrigsten Zustand positiver Energie, der noch recht nahe beim oberen Kontinuum liegt. Hier kommt man erst gar nicht auf die Idee die Fermi-Kante für den Grundzustand woanders hinzulegen als in diesen großen Gap. Bei starken Feldern (Gebiet B) ist die Lage nicht mehr so klar. Je nachdem wohin die Fermi-Kante im Gap gelegt wird, erhält man Zustände mit verschiedenen Ladungen. Es ist dann nicht mehr sinnvoll von einem Grundzustand schlechthin zu sprechen. Man muß die vielen Grundzustände durch ihre Ladung charakterisieren. Ein Grundzustand soll natürlich ein stabiler Zustand sein, d.h. er soll normierbar sein und keine Ströme enthalten. Im freien Fall z.B. gibt es nur zur Ladung 0 einen Grundzustand, denn alle anderen Eigenzustände des Systems sind Kontinuumszustände. Wenn aber ein äußeres Potential gebundene Zustände liefert, lassen sich mehrere Grundzustände definieren (siehe Figur 1). Zur Fermi-Linie F_1 gehört der Grundzustand mit der Ladung 0, zu F_2 der mit der Ladung 2, denn der $1s_{1/2}$ -Zustand kann mit zwei Elektronen besetzt werden. Bei sehr starken Feldern passiert etwas eigenartiges: Die F_1 -Linie kann nicht über den Punkt C in Figur 1, bei dem der

Is_{1/2}-Zustand in das untere Kontinuum eintaucht, fortgesetzt werden, ohne die Zustandslinie zu kreuzen. Wenn wir statt dessen die F₂-Linie verfolgen und annehmen, daß bei stetiger Zunahme des äußeren Feldes und festgehaltener Fermilinie sich die Ladung und die Normierbarkeit des entsprechenden Grundzustandes nicht sprunghaft ändern kann und somit erhalten bleibt, können wir schließen, daß auch noch nach dem Punkt C der Zustand zur F₂-Linie normierbar und stromfrei ist und somit ein Grundzustand zur Ladung 2 ist. Nach Punkt C existiert dann kein Grundzustand zur Ladung 0 mehr, denn dieser läge im Kontinuum. Dieses Stetigkeitsargument ist natürlich kein Beweis, ein solcher steht noch aus. Es mag etwas überraschen, daß bei Punkt C in Figur 1 ein gebundener Zustand ins Kontinuum übergeht und danach der Grundzustand zur Ladung 2 trotzdem noch normierbar sein soll. Die Formation von gebundenen Zuständen aus dem oberen Kontinuum ist wegen der Ladungssymmetrie der Quantenelektrodynamik ein analoges Problem. Auch dort nimmt man mit Erfolg normierbare Grundzustände an. Nach allen diesen Überlegungen kann man zusammenfassen: Eine wesentliche Eigenschaft sehr starker Felder ist es, daß sie keinen Grundzustand zur Ladung 0 mehr besitzen.

Bis jetzt wurden nur Elektronen im äußeren Feld ohne deren gegenseitige Wechselwirkung betrachtet. Daß das bei sehr starken Feldern überhaupt zu normierbaren Grundzuständen führt, liegt am Pauli-Prinzip, das in dem Bild der Fermi-see besetzter Zustände und damit in Gl. (1b) ausgedrückt ist. Im Falle von Bosonen würde dies nicht durchführbar sein. Da ergäbe sich bei Vernachlässigung der Restwechselwirkung für sehr starke Felder ein instabiler Grundzustand. Man kann sich das anschaulich so vorstellen: Bei äußeren Feldern tritt eine Polarisierung des Vacuums ein; d.h. es entstehen virtuelle Teilchen-Loch-Paare, die zu dem äußeren Feld noch ein induziertes Feld erzeugen. Beim Abschalten des äußeren Feldes verschwinden diese Paare wieder. Wird das äußere Feld zu stark, werden sogar reelle Teilchen-Loch-Paare aufgebrochen. (Das ist genauso wie in der klassischen Physik, wenn man Dielektrika in äußeren Feldern,

dem Feld eines Kondensators zum Beispiel, behandelt.) Die Teilchen, die angezogen werden, laufen ins Zentrum, die Abgestossenen nach unendlich weg. Die erzeugten Teilchen haben ihrerseits eine Ladung die das äußere Feld beeinflusst. In dem Fall hier wird das äußere Feld geschwächt. Das geschieht so lange bis das äußere Feld so schwach ist, daß keine Paare mehr erzeugt werden können. Wenn wir nun diese Rückwirkung der erzeugten Teilchen auf das erzeugende Feld vernachlässigen, wird die Paarerzeugung nicht gestoppt. Das heißt, nur bei Bosonen wird sie nicht gestoppt, denn bei den Fermionen passen nur eine begrenzte Zahl von Teilchen in ein endliches Volumen, hier das Gebiet um das Zentrum. Dadurch wird der Teilchenzufluß zum Zentrum gestoppt, auch ohne daß man die Rückwirkung der Teilchen auf das äußere Feld in Betracht zieht. Bei Fermionen gibt uns das Pauli-Prinzip einen weiteren Prozess, der eine unbegrenzte Teilchenerzeugung stoppt. Nichtsdestoweniger wird die Berücksichtigung der Ladung der erzeugten Teilchen sehr wichtig sein. Erstens stimmt andernfalls die Energiebilanz nicht mehr, da Teilchen erzeugt werden, ohne daß das erzeugende Feld geschwächt wird. Zweitens wird deren Berücksichtigung die Lage des Eintauchpunktes für den untersten gebundenen Zustand in das untere Kontinuum stark beeinflussen, wenn es nicht gar dazu führt, daß der unterste gebundene Zustand überhaupt nicht mehr an dieses Kontinuum herankommt, sondern sich bloß noch asymptotisch für sehr starke Felder nähert. Das würde bedeuten, daß die reelle Teilchen-Loch Produktion erst gar nicht einsetzte.

Den starken Einfluß der Vakuumpolarisation sieht man auch, wenn man die Ergebnisse von Pieper und Greiner⁸⁾ bzw. von Fricke⁹⁾ für die Wellenfunktionen gebundener Zustände betrachtet (Figur 2). Für einen Kern mit $Z \approx 164$ und $R \approx 10 \text{ fm}$ liegt das erste Maximum im Radialteil der Wellenfunktionen bei ungefähr 25 fm . Dieses erste Maximum ist gegenüber den direkt folgenden etwas betont. Aber gerade in der Umgebung des Kernes erwarten wir die stärkste Änderung des äußeren Feldes durch Vakuumpolarisation. Das heißt, daß die Wellenfunktionen gebundener Zustände empfindlich auf die Vakuumpolarisation reagieren. Ein weiteres Argument ist, daß die

der Abstand der Energien zwischen den beiden Zuständen abnimmt. Das bedeutet, wenn der unterste gebundene Zustand auf das untere Kontinuum zurückt, wird die äußere-Feld-Näherung immer schlechter.

Nun haben wir in der Einführung gesehen, daß Quantenfeldefekte bei starken Feldern wichtig sind. Im nächsten Kapitel werden einige feldtheoretische Grundlagen bereitgestellt. In Kapitel 3 wird eine rechenbare Näherung für die vollständigen Feldgleichungen abgeleitet. In Kapitel 4 werden Drehimpulsprobleme gelöst. Die auftretenden Renormierungsschwierigkeiten werden in Kapitel 5 behandelt. Zum Schluß in Kapitel 6 wird das Erreichte diskutiert und die Weiterführung der Theorie erörtert.

II. Feldtheoretische Grundlagen

In der Quantenelektrodynamik haben wir es mit zwei Arten von Feldern zu tun, dem spinoriellen Elektronenfeld $\Psi(x)$ und dem vektoriellen Photonenfeld $A_\mu(x)$, $\mu=1,2,3,4$. Die $\Psi(x)$ und $A_\mu(x)$ werden als Operatoren im Heisenbergbild aufgefasst; d.h. sie tragen die volle Zeitabhängigkeit der Prozesse wohingegen die Zustandsvektoren, auf die sie wirken, nicht von der Zeit abhängen. Die Lagrangedichte wird formal wie bei der klassischen Theorie wechselwirkender Felder definiert; nur ist sie hier ein Operator. (Ref. 2-5)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu} - \frac{1}{4} [\tilde{\Psi}(x), (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi(x)] \\ (2) \quad & -\frac{1}{4} [i\partial_\mu \tilde{\Psi}(x) \gamma^\mu + m \tilde{\Psi}(x), \Psi(x)] + \frac{e}{2} [\tilde{\Psi}(x) \gamma^\mu, \Psi(x)] A_\mu(x) + j^\mu(x) A_\mu(x) \end{aligned}$$

Die Feldgleichungen werden daraus, wie im klassischen Fall, durch ein Variationsprinzip abgeleitet.

$$\begin{aligned} (i\partial - m) \Psi(x) &= e A(x) \Psi(x) \\ (3a) \quad \square A_\mu(x) &= j_\mu(x) - \frac{e}{2} [\tilde{\Psi}^+(x) \gamma_\mu, \Psi(x)] \\ \partial &= \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad A = \gamma^\mu A_\mu \end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen noch durch eine Quantisierungsvorschrift für die Felder $\Psi(x)$ und $A_\mu(x)$ ergänzt werden. Sie wird durch Kommutatorbeziehungen ausgedrückt.

$$\begin{aligned} (3b) \quad \{\Psi(x), \tilde{\Psi}(x')\}_{x_0=x'_0} &= \gamma^0 \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') \\ [A_\mu(x), \partial_0 A_\nu(x')]_{x_0=x'_0} &= -i g_{\mu\nu} \delta^3(x - x') \end{aligned}$$

(dabei ist $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor im Minkowski-Raum)
Alle anderen Kommutatoren bzw. Antikommutatoren verschwinden.
Die Gl. (3a) und (3b) zusammen beschreiben die Physik von Elektronen und Photonen vollständig. Ausführlichere Beschreibungen der Feldoperatoren und Feldgleichungen sind

in den Standardwerken der Feldtheorie zu finden, von denen unter den Referenzen 2 bis 5 einige genannt sind. Die vorliegende Arbeit benutzt aber nicht die Feldoperatoren $\psi(x)$ und $A_\mu(x)$, sondern die Beschreibung mit Hilfe von Greensfunktionen. Eine Greensfunktion ist der Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produktes von Feldoperatoren (Ref.3, Kap.17)

$$(4) \quad G(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) = \langle 0 | T(\psi(x_1) \dots \psi(x_m) \tilde{\psi}(y_1) \dots \tilde{\psi}(y_m) A_\mu(z_1) \dots A_\mu(z_n)) | 0 \rangle$$

Für uns von besonderem Interesse sind die sogenannten Einteilchengreensfunktionen für das Elektron und das Photon. Sie seien im weiteren mit $G(x,y)$ bzw. $D(x,y)$ bezeichnet.

$$(5) \quad G(x,y) = i \langle 0 | T(\psi(x) \tilde{\psi}(y)) | 0 \rangle$$

$$D_\mu(x,y) = -i \langle 0 | T(A_\mu(x), A_\nu(y)) | 0 \rangle$$

Diese Greensfunktionen haben eine physikalisch anschauliche Bedeutung. Die Elektronengreensfunktion G zum Beispiel ist nichts anderes als die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß ein bei y erzeugtes Elektron bei x wieder gefunden werden kann. Man nennt diese Funktionen deshalb auch Propagatoren. (Eine ausführliche und anschauliche Einführung in den Propagatorbegriff ist in Ref. 4, Kap.6 zu finden.)

Die Gleichung für die Greensfunktion eines freien Elektrons lautet

$$(6a) \quad (i\partial - m) S(x,y) = -\delta(x-y)$$

Hinzu kommt als Randbedingung, daß Teilchenzustände, die zum positiven Energiekontinuum gehören, vorwärts und solche, die

zu negativen Energien gehören, rückwärts in der Zeit propagieren. Die Lösung zu Gl. (6a) und deren Randbedingung ist

$$(6b) \quad S(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{p+m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Das $i\varepsilon$ im Nenner definiert den Integrationsweg auf der p_0 -Achse. Schon etwas schwieriger zu lösen ist die Gleichung für die Greensfunktion eines Elektrons im äusseren Feld.

$$(7a) \quad (i\partial_x - m + e A(x)) G(x, y) = -\delta^4(x-y)$$

Ein möglicher Weg G zu bestimmen ist die Entwicklung nach Potenzen des äusseren Feldes. Dazu formulieren wir die Gl.

(7a) als Integralgleichung durch Multiplikation von $\int dx S(z-x) \dots$

$$(7b) \quad G(x, y) = S(x, y) + e \int dz S(x, z) A(z) G(z, y)$$

Diese Gleichung kann nun durch Iteration gelöst werden. Man beginnt mit $G=S$ und setzt dies auf der rechten Seite von Gl. (7b) ein. So erhält man eine verbesserte Greensfunktion G , die man wieder auf der rechten Seite von Gl. (7b) einsetzen kann. Das kann man fortsetzen bis das Ergebnis die gewünschte Genauigkeit hat. Die ersten Schritte sehen dann so aus:

$$G_0(x, y) = S(x, y)$$

$$G_1(x, y) = S(x, y) + e \int dz S(x, z) A(z) S(z, y)$$

$$(7c) \quad G_2(x, y) = S(x, y) + e \int dz S(x, z) A(z) S(z, y) + e^2 \int dz dz' S(x, z) A(z) S(z, z') A(z') S(z', y)$$

An diesem Beispiel kann man auch sehr schön die in der Quantenfeldtheorie übliche graphische Darstellung von Integralgleichungen demonstrieren. Für $S(x,y)$ setzen wir eine gerade Linie mit den Endpunkten x und y ; für $G(x,y)$ wählen wir eine ebensolche Linie die zusätzlich noch mit einem G gekennzeichnet ist. Das äußere Potential $A(x)$ wird durch eine Schlangenlinie mit dem Endpunkt x dargestellt. Die Gleichungen (7b) und (7c) sind mit diesen Konventionen in Figur. 3 veranschaulicht. Es ist üblich die Koordinaten an den Endpunkten der Linien nicht auszuschreiben, da man auch ohne dies sehr gut weiß, was jeweils gemeint ist.

Eine endliche Störungsentwicklung von Gl. (7a) (siehe Gl. (7c)) beschreibt keine Bindungszustände. Sie ist nur bei Streuproblemen und bei Potentialen ohne gebundene Zustände eine gute Näherung. Wenn wir ein zeitunabhängiges äußeres Potential haben, so daß die Wellenfunktionen nur mit $e^{-i\omega t}$ von der Zeit abhängen, läßt sich auch eine exakte Lösung für Gl. (7a) angeben. Wir setzen voraus daß die Lösungen der zugehörigen Dirac-Gleichung

$$(8) \quad (i\partial - m + eA) \Phi(x) = 0$$

bekannt sind. Der Feldoperator ist dann, in Umkehrung von Gl. (1a),

$$(9) \quad \begin{aligned} \psi(x) &= \sum_q \Phi_q(x) a_q \\ \psi^\dagger(x) &= \sum_q \Phi_q^*(x) a_q^\dagger \end{aligned}$$

wobei $a_q^\dagger$ und a_q die Erzeugungs bzw. Vernichtungsoperatoren für ein Elektron im Zustand q sind. Der Grundzustand des Systems ist wieder definiert wie in Gl. (1b). Damit wird

$$\begin{aligned}
 G(x,y) &= i \langle 0 | T(\psi(x) \tilde{\psi}(y)) | 0 \rangle \\
 &= -i \vartheta(t_x - t_y) \sum_{q > F} \Phi_q(x) \tilde{\Phi}_q(y) \\
 &\quad + i \vartheta(t_y - t_x) \sum_{q < F} \Phi_q(x) \tilde{\Phi}_q(y) \\
 &= - \int \frac{d\eta}{2\pi} e^{-i\eta(t_x - t_y)} \sum_q \frac{\Phi_q(x) \tilde{\Phi}_q(y)}{\eta - \varepsilon_q \pm i\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

($i\alpha$ definiert den Integrationsweg: + für $q < F$, - für $q > F$)

Dabei wurde verwendet (Ref.4, Kap.6):

$$\vartheta(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon}
 \tag{11}$$

An dieser Stelle sieht man wieder, daß die Teilchenzustände vorwärts und die Lochzustände rückwärts in der Zeit gestreut werden, wie das im Falle des freien Propagators schon einmal erwähnt wurde. (Dasselbe ist auch in der nichtrelativistischen Vielteilchenphysik bekannt).

Die Gl. (7a) ist die Gleichung für die Greensfunktion von Elektronen in äußeren Feldern. Der Einfluß des Photonenfeldes ist darin nicht berücksichtigt. Aber so wie wir in den Feldgleichungen für die Operatoren $\psi(x)$ und $A_\mu(x)$ zwei gekoppelte Gleichungen erhalten, so hat man auch für die Elektronengreensfunktion G und die Photonengreensfunktion D zwei gekoppelte Gleichungen, die sogenannten Schwinger-gleichungen.

$$(i \not{\partial} - m + e \not{A}(x)) G(x, y)$$

$$- \int dx' M(x, x') G(x', y) = - \delta(x - y)$$

$$\square_x D_{kl}(x, y) = -g^{kl} \delta(x - y) + \int d\xi P_k^m(x, \xi) D_{ml}(\xi, y)$$

$$M(x, x') = m \delta(x - x') - ie^2 \gamma^k \int d\xi dx'' G(x, x'') \Gamma^l(x'', x' | \xi) D_{kl}(\xi, x)$$

(12)

$$P_k^m(x, \xi) = ie^2 g_{kl} \text{Sp} \{ \gamma^k \int dx' dx'' G(x, x') \Gamma^m(x', x'' | \xi) G(x'', x) \}$$

$$\sigma_k(x) = A_k^{\text{ext}}(x) - ie g_{kl} \int dz D_0(x - z) \text{Sp} (\gamma^l G(z, z))$$

$$\Gamma^l(x', x'' | \xi) = \gamma^l \delta(x' - \xi) \delta(x'' - \xi)$$

$$- ie^2 \int dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 dz_5 dz_6 \Gamma^v(x, z_2 | z_3)$$

$$\cdot G(z_2, z_1) \Gamma^l(z_1, z_6 | \xi) G(z_6, z_5)$$

$$\cdot \Gamma^{\mu}(z_5, y | z_4) D_{\mu\nu}(z_3, z_4)$$

+

Deren graphische Darstellung ist in Figur 4 gegeben. $A_k^{\text{ext}}(x)$ ist das äußere Feld. $\mathcal{O}_k(x)$ ist das gesamte Feld; da kommt zum äußeren Feld noch das induzierte Feld hinzu, das durch die Erzeugung virtueller Elektron-Positron-Paare entsteht. Das kann man an dem Ausdruck $\text{Sp}(\gamma^L G(x,x))$ sehen, der ja gerade die induzierte Ladungs- und Stromdichte darstellt. $\Gamma^L(x', x'', \xi)$ ist die sogenannte Dreipunkt- oder auch Vertexfunktion. Sie kann nicht geschlossen angegeben werden, sondern nur in einer Entwicklung nach Potenzen des Kopplungsparameters e^2 . Der Operator $M(x, x')$ beschreibt die Massenkorrektur des Elektrons, $P_k^m(x, \xi)$ die Polarisationskorrektur des Photons. Die Ableitung dieser Gleichung ist sehr aufwendig. Ich verweise daher auf Ref.5, Kap.34, wo sie sehr ausführlich durchgeführt und erklärt ist.

III. Näherung durch eine selbstkonsistente Gleichung

Es ist ein aussichtsloses Unterfangen die Schwingergleichungen (12) exakt zu lösen. Eine gebräuchliche Näherung ist die Störungsentwicklung. Aber da man dabei nach Potenzen des äußeren Feldes entwickelt, ist dieser Weg im Falle starker Felder nicht gangbar, denn eine Störungsentwicklung konvergiert hier schlecht, wenn überhaupt. Vergessen wir erst einmal die Schwingergleichung und versuchen wir mit physikalischer Intuition etwas zu erreichen. Numerisch am geeignetesten wäre eine Beschreibung mit Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen. Hierfür bieten sich die schon bekannten Einteilchenwellenfunktionen $\Phi_q(x)$ an. Ein Weg Vielteilchenprobleme mit Einteilchenwellenfunktionen zu lösen ist aus der klassischen Physik als Hartree-Fock-Methode oder selbstkonsistente Näherung bekannt. Dies läßt sich auch auf den hier vorliegenden Fall relativistischer Felder erweitern. Wenn wir einen vollständigen Satz von Wellenfunktionen $\{\Phi_q(x)\}$ haben, können wir die Ladungsdichte des Vakuums berechnen.

$$(13) \quad \rho(x) = -\frac{1}{2} e \langle 0 | [\Psi^\dagger(x), \Psi(x)] | 0 \rangle = \frac{1}{2} e \sum_q \Phi_q^\dagger(x) \Phi_q(x)$$

$$\sum_q \dots = \sum_{q < F} \dots - \sum_{q > F} \dots$$

Diese führt zu einem induzierten Potential.

$$(14) \quad V_{ind}(x) = \frac{1}{4\pi} \int dy \frac{\rho(y)}{|x-y|} = \frac{e}{8\pi} \int dy \frac{\sum_q \Phi_q^\dagger(x) \Phi_q(x)}{|x-y|}$$

Dies Potential V_{ind} muß zum äußeren Potential in der Dirac-Gleichung addiert werden; es entspricht dem direkten (oder auch Hartree-Term genannten) Term in den Hartree-Fock-Gleichungen. Wir arbeiten hier mit Fermionen, deshalb muß noch ein entsprechender Austauschterm berücksichtigt werden.

Wenn wir dies alles zusammennehmen, kommen wir zu der selbstkonsistenten Gleichung, die ein Elektronenfeld beschreibt, das im Gleichgewicht mit dem von ihm erzeugten elektrischen Feld steht.

$$\begin{aligned}
 & (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + eV(x) + \gamma_0 m) \Phi_q(x) + \frac{e^2}{8\pi} \left\{ \int d^3z \frac{\sum_p \tilde{\Phi}_p(z) \gamma_0 \Phi_p(z)}{|x-z|} \Phi_q(x) \right. \\
 (15) \quad & \left. - \int d^3z \frac{\sum_p \Phi_p(x) \tilde{\Phi}_p(z) \gamma_0}{|x-z|} \Phi_q(z) \right\} = \epsilon_q \Phi_q(x)
 \end{aligned}$$

Dabei ist der erste Teil die bekannte Dirac-Gleichung mit äußerem Potential; die beiden anderen Terme sind das induzierte Potential (14) und dessen Austauschterm.

Bei schwachen Feldern ist die induzierte Ladung, und damit die Feldkorrektur, sehr gering. Das heißt:

$$(16) \quad \sum_{q < F_0} \rho_q - \sum_{q > F_0} \rho_q \approx 0, \quad \rho_q = \Phi_q^+(x) \Phi_q(x)$$

wobei F_0 die Fermikante zur Ladung 0 ist. Betrachten wir Gl. (15) für ein vollständig gefülltes, also neutrales, Atom, indem wir die Summen in Gl. (15) mit der Fermikante F_Z nehmen, gilt

$$(17) \quad \sum_{q < F_Z} \rho_q - \sum_{q > F_Z} \rho_q = 2 \sum_{F_0 < q < F_Z} \rho_q + \left(\sum_{q < F_0} \rho_q - \sum_{q > F_0} \rho_q \right) \approx 2 \sum_{F_0 < q < F_Z} \rho_q$$

Damit reduziert sich Gl. (15) auf die klassischen Hartree-Fock-Gleichungen für das Atom, bei denen ja nur über die gebundenen Elektronenzustände summiert wird.

Die Gl. (15) wurde intuitiv gewonnen. Eine sehr ähnliche Gleichung kann man aber auch aus den Schwinger-Gleichungen ableiten. Die Schwinger-Gleichungen (12) sind zwei gekoppelte Gleichungen für den Elektronenpropagator G und den Photonenpropagator D . Der erste Schritt zur Vereinfachung ist, diese Gleichungen zu entkoppeln. Dazu halten wir den Photonenpropagator D in der Gleichung für den Elektronenpropagator fest und setzen $D=D_0$, wobei D_0 der Propagator des freien Photons sein soll. Weiterhin stört die unbekannte Vertexfunktion $\Gamma_\mu(x, y | \xi)$. Sie wird durch den ersten Schritt ihrer Störungsentwicklung genähert, $\Gamma_\mu(x, y | \xi) = \gamma_\mu \delta(x-\xi) \delta(y-\xi)$. (In nichtrelativistischen Rechnungen führt eine ähnliche Näherung für die Vertexfunktion Γ zur Hartree-Fock-Näherung) Nach diesen beiden Näherungen bleibt eine vereinfachte Gleichung für die Elektronengreensfunktion übrig.

$$(18) \quad (i\partial + eA - m) G(x, y) = ie^2 \left\{ \int d^4z D_0(z, x) \gamma^\mu \text{Sp}(\gamma_\mu G(z, z)) G(x, y) - \int d^4z \gamma^\mu G(x, z) \gamma_\mu D_0(z, x) G(z, y) \right\} = -\delta^4(x-y) 1$$

Interessant ist zu bemerken, daß nur der dritte Term in Gl. (18) $\int d^4z \gamma^\mu G(x, z) \gamma_\mu D_0(z, x) G(z, y)$ gegenüber der Schwinger-Gleichung geändert ist. Alle beiden Näherungen, $D=D_0$ und $\Gamma_\mu = \gamma_\mu \delta \delta$ sind in diesem Term enthalten. Die restlichen Terme sind in der Schwinger-Gleichung (12) und der Gl. (18a) dieselben. (Graph. Darst. von Gl. (18) in Fig. 5)

Nun müssen wir von Gl. (18), die eine Gleichung für die Elektronengreensfunktion ist, zu einer Gleichung für die Einteilchenwellenfunktionen $\phi_q(x)$ kommen. Das äußere Feld $A(x)$ soll nicht von der Zeit abhängen. Deshalb erwarten wir stationäre Lösungen. In solch einem Fall aber können wir für die Greensfunktion den Ansatz (10) machen.

$$(10) \quad G(x, y) = - \int \frac{d\eta}{2\pi} e^{-i\eta(t_x - t_y)} \sum_q \frac{\tilde{\Phi}_q(x) \tilde{\Phi}_q(y)}{\eta - \epsilon_q \pm i\alpha}$$

Diesen Ansatz setzen wir in Gl. (18) ein. Das ergibt

$$(19) \quad \int \frac{d\eta}{2\pi} e^{-i\eta(t_x - t_y)} \left\{ \left(\gamma_0 \eta + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + e A(\vec{x}) - m \right) \right. \\ \left. + \frac{e^2}{8\pi} \int d^3z \gamma^\mu \sum_p \frac{\tilde{\Phi}_p(z) \gamma_\mu \tilde{\Phi}_p(z)}{|x - z|} \right\} \sum_p \frac{\tilde{\Phi}_p(x) \tilde{\Phi}_p(y)}{\eta - \epsilon_p \pm i\alpha} \\ - \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int d^3z \sum_p \gamma^\mu \tilde{\Phi}_p(x) \tilde{\Phi}_p(z) \gamma_\mu \int_0^\infty k dk \frac{d_0(k|x-z|)}{(\eta - \epsilon_p \pm i\alpha)} \\ \left. \sum_p \frac{\tilde{\Phi}_p(z) \tilde{\Phi}_p(y)}{\eta - \epsilon_p \pm i\alpha} \right\} = \delta^4(x - y)$$

In dieser Gleichung stammen die ersten Terme von der Dirac-Gleichung mit äußerem Feld. Der Operator $i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}$ wurde $\gamma_0 \eta$, da er nur auf die Exponentielfunktion wirkt. Der Term proportional zu $e^2/8\pi$ entspricht dem zweiten Term in Gl. (18), er beschreibt das durch die Ladungs- und Stromdichte des Vakuums, $\tilde{\Phi} \gamma_\mu \tilde{\Phi}$, induzierte Feld. Der Term proportional $-e^2/(2\pi)^2$ kommt vom dritten Term in Gl. (18).

Nun führen wir eine Fouriertransformation von der Zeit zur Energie durch, indem wir mit $e^{i\tilde{\eta}(t_x - t_y)}$ multiplizieren und über $d(t_x - t_y)$ integrieren. Das gibt im wesentlichen die Gl. (19), nur ohne das Integral $\int \frac{d\eta}{2\pi} e^{-i\eta(t_x - t_y)} \dots$ am Anfang. Auf der rechten Seite der Gleichung steht dann ein $\delta^4(\vec{x} - \vec{y})$.

Um den störenden Energienenner zu entfernen, führen wir ein Kreisintegral um $\epsilon_p - i\alpha$ in der komplexen $\tilde{\eta}$ -Ebene aus. Danach bleiben von der Summe über p nur die entarteten Zustände mit der Energie ϵ_p übrig. Um diese zu trennen, wird noch von rechts mit $\gamma_0 \tilde{\Phi}_p(y)$ multipliziert und über d^3y integriert. Das Ergebnis ist die endgültige Gleichung für die Wellenfunktionen $\tilde{\Phi}_p(x)$.

$$(20) \quad (-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} - e\gamma_0 A(x) + \gamma_0 m) \tilde{\Phi}_p(x) + \frac{e^2}{8\pi} \gamma_0 \left\{ \int d^3z \gamma^\mu \sum_{\tilde{p}} \frac{\tilde{\Phi}_{\tilde{p}}(z) \gamma_\mu \tilde{\Phi}_{\tilde{p}}^*(z)}{|x-z|} \tilde{\Phi}_p(x) \right. \\ \left. - \int d^3z \sum_{\tilde{p}} \gamma^\mu \tilde{\Phi}_p(x) \tilde{\Phi}_{\tilde{p}}^*(z) \gamma_\mu \frac{F(|x-z|, \epsilon_{\tilde{p}} - \epsilon_p, \text{sg}(\tilde{p}))}{|x-z|} \tilde{\Phi}_{\tilde{p}}(z) \right\} = \epsilon_p \tilde{\Phi}_p(x)$$

mit

$$(20b) \quad F(|x-z|, \epsilon_{\tilde{p}} - \epsilon_p, \text{sg}(\tilde{p})) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\sin(k|x-z|)}{\epsilon_{\tilde{p}} - \epsilon_p + \text{sg}(\tilde{p})(k - i\alpha)}$$

$$\text{sg}(\tilde{p}) = \begin{cases} +1 & \text{für } \tilde{p} > \tilde{F} \\ -1 & \text{" } \tilde{p} < \tilde{F} \end{cases}$$

Diese Gleichung ist der Gl. (15) sehr ähnlich. Nur der Austauschterm ist durch die Funktion (20b) verändert. Das ist eine relativistische Korrektur, die die Retardierung der virtuellen Photonen beinhaltet. Im nichtrelativistischen Grenzfall wird

$$(21) \quad \lim_{(\epsilon_p - \epsilon_q) \cdot |x-z| \rightarrow 0} F(|x-z|, \epsilon_p - \epsilon_q, \text{sg}(p)) = -\text{sg}(p)$$

Damit reduziert sich dieser Term auf den klassischen Austauschterm in Gl. (15).

Die Gl. (20) wird mit einem Iterationsverfahren gelöst. Man nimmt sich einen Startsatz von Wellenfunktionen $\{\tilde{\Phi}_{\vec{p}}(x)\}$ und setzt den in die Summen in Gl. (20b) ein. Die Lösungen der so erhaltenen Gleichung werden wieder in diese Summen eingesetzt. Das gibt eine verbesserte Gleichung. Deren Lösungen können wieder in die Summen eingesetzt werden. Das wird solange wiederholt bis Konvergenz erreicht ist; das heißt, bis sich das Ergebnis von einem Schritt zum anderen nicht mehr zu stark ändert. Wenn man für den Startsatz $\{\tilde{\Phi}_{\vec{p}}(x)\}$ die Lösungen der Dirac-Gleichung mit äußerem Potential nimmt, wird auch der erste Iterationsschritt schon viele wertvolle Information liefern.

Die Gleichung (20) ist für solch ein Iterationsverfahren noch etwas zu kompliziert; denn sie enthält einen Integraloperator und dieser hängt durch die Funktion (20b) noch von der Energie des gesuchten Zustandes ab. Um die Gleichung zu vereinfachen, muß man den Integraloperator in Differentialoperatoren entwickeln. Wenn man annimmt, daß die Wellenfunktionen, auf die der Operator wirkt, nach einer Taylor-Reihe entwickelt werden können, läßt sich schreiben

$$(22) \quad \int d^3y K(x,y) f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3y K(x,y) [(\vec{y}-\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_x]^n f(x)$$

Damit ist der Integraloperator in Differentialoperatoren entwickelt. Nun hat der Integralkern in Gl. (20)

$$(23) \quad \sum_{\vec{p}} \gamma^{\mu} \tilde{\Phi}_{\vec{p}}(x) \tilde{\Phi}_{\vec{p}}(y) \gamma^{\mu} \frac{F(|x-y|, \epsilon_p - \epsilon_q, sg(p))}{|x-y|}$$

seinen Hauptbeitrag in der Gegend $x=y$, wie man durch den Nenner $|x-y|$ sehen kann. Für nicht zu hohe Energien ϵ_p

variiert $\phi_p(x)$ langsam in der Umgebung von $x=y$. Dann macht man keinen großen Fehler, wenn man die Taylorreihe abbricht. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die ersten beiden Terme.

$$(24) \quad \int d^3y K(x,y) f(y) \approx \left[\int d^3y K(x,y) \right] f(x) + \left[\int d^3y K(x,y) (\vec{y} - \vec{x}) \right] \cdot \vec{\nabla}_x f(x)$$

Der erste Term ist ein Operator, der wie ein Potential wirkt. Der zweite ist linear in den räumlichen Ableitungen. Beide Terme lassen sich noch ganz gut mit den herkömmlichen Lösungsmethoden für die Diracgleichung verarbeiten. Es bleibt noch die störende ϵ_p -Abhängigkeit der Operatoren zu beseitigen. Dazu entwickeln wir sie einfach in eine Taylor-Reihe nach ϵ_p um den Punkt $\epsilon_p = m$ (m ist die Elektronenmasse). Der Grund, warum man um $\epsilon_p = m$, d.h. um die Massenschale, entwickelt, wird im Kapitel über die Renormierung klar werden. Auch diese Taylor-Reihe wird abgebrochen; im ersten Term gehen wir bis zu der Ordnung linear in ϵ_p , im zweiten nehmen wir nur die nullte Ordnung mit. (Ein Term proportional zu $\epsilon_p \cdot \vec{\nabla}_x$ wäre schon eine Größe zweiter Ordnung; denn ϵ_p ist ja nichts anderes als die Fouriertransformierte von $i \frac{\partial}{\partial t}$.) Mit diesen Näherungen sieht die Gleichung, mit der dann weitergearbeitet werden soll, so aus:

$$(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - e\gamma_0 A(x) + \gamma_0 m) \Phi_p(x)$$

$$+ \frac{e^2}{8\pi} \gamma_0 \left\{ \int d^3z \gamma^\mu \sum_{\tilde{p}} \frac{\tilde{\Phi}_{\tilde{p}}(z) \gamma_\mu \tilde{\Phi}_{\tilde{p}}(z)}{|x-z|} \Phi_p(x) \right.$$

$$- \int d^3z \sum_{\tilde{p}} \gamma^\mu \Phi_{\tilde{p}}(x) \tilde{\Phi}_{\tilde{p}}(z) \gamma_\mu \frac{F(|x-z|, \epsilon_{\tilde{p}}-m, sg(\tilde{p}))}{|x-z|} \Phi_p(x)$$

(25)

$$- \int d^3z \sum_{\tilde{p}} \gamma^\mu \Phi_{\tilde{p}}(x) \tilde{\Phi}_{\tilde{p}}(z) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \epsilon_p} F(|x-z|, \epsilon_{\tilde{p}}-\epsilon_p, sg(\tilde{p})) \Big|_{\epsilon_p=m} \epsilon_p \Phi_p(x)$$

$$- \int d^3z \sum_{\tilde{p}} \gamma^\mu \Phi_{\tilde{p}}(x) \tilde{\Phi}_{\tilde{p}}(z) \gamma_\mu \frac{F(|x-z|, \epsilon_{\tilde{p}}-m, sg(\tilde{p}))}{|x-z|} (\vec{y}-\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_x \Phi_p(x) \}$$

$$= \epsilon_p \Phi_p(x)$$

IV. Separation der Drehimpulswellenfunktionen

Die Gl. (25) kann noch weiter vereinfacht werden, wenn für das äußere Potential ein rotationsinvariantes Coulombpotential genommen wird.

$$(26) \quad A(\vec{x}) = \delta_0 V(|\vec{x}|)$$

Dann ist der Drehimpuls eine gute Quantenzahl und man kann die Wellenfunktionen folgendermaßen ansetzen¹²⁾:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} g(r_x) \chi_{\kappa\mu}(\Omega_x) \\ i f(r_x) \chi_{-\kappa\mu}(\Omega_x) \end{pmatrix}$$

(27)

$$\chi_{\kappa\mu} = \sum_{m,n} \left(l \frac{1}{2} j \mid m \ n \mu \right) Y_{lm} \begin{pmatrix} j_{n, \frac{1}{2}} \\ j_{n, -\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$j = |\kappa| - \frac{1}{2}, \quad l = |\kappa| - \frac{1 - \text{sign}(\kappa)}{2}$$

Für die "Zweiteilchenpotentiale" $1/|x-y|$ und $F(|x-y|, \varepsilon, \text{sign})/|x-y|$ wird eine Entwicklung in Multipolfelder durchgeführt¹³⁾.

$$(28) \quad V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} v_\ell(r_1, r_2) Y_{\ell m}^*(\Omega_1) Y_{\ell m}(\Omega_2)$$

Für das Potential $1/|x-y|$ ist diese Entwicklung hinreichend bekannt. Für die anderen Potentiale

$$(29) \quad W = \frac{F(|x-y|, \varepsilon_p - m, sg(p))}{|x-y|} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty q dq \frac{j_0(q|x-y|)}{\varepsilon_p - m + sg(p)(q - i\alpha)}$$

$$\tilde{W} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_q} \frac{F(|x-y|, \varepsilon_p - \varepsilon_q, sg(p))}{|x-y|} \Big|_{\varepsilon_q = m} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty q dq \frac{j_0(q|x-y|)}{[\varepsilon_p - m + sg(p)(q - i\alpha)]^2}$$

brauchen wir die Multipolentwicklung der Besselfunktion¹⁴⁾:

$$(30) \quad j_0(q|x-y|) = 4\pi \sum_{\lambda} (-1)^\lambda j_\lambda(q|x|) j_\lambda(q|y|) [Y_\lambda(\Omega_x) Y_\lambda(\Omega_y)]^0$$

Damit erhalten wir die Multipolentwicklung von W und $\tilde{W}$.

$$(31) \quad w_\ell = (-1)^{\ell+1} (2\ell+1) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q dq \frac{j_\ell(q|x|) j_\ell(q|y|)}{\varepsilon_p - m + sg(p)(q - i\alpha)}$$

$$\tilde{w}_\ell = (-1)^{\ell+1} (2\ell+1) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q dq \frac{j_\ell(q|x|) j_\ell(q|y|)}{[\varepsilon_p - m + sg(p)(q - i\alpha)]^2}$$

Weiterhin brauchen wir für die Umrechnung der Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ in Drehimpulsoperatoren folgende Formeln¹²⁾:

$$(32) \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} = \alpha_r \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right) = \alpha_r \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma_0 K - 1}{r} \right)$$

$$\alpha_r = \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad K = \gamma_0 (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1), \quad \sigma = \gamma_5 \alpha$$

Die Einführung des Operators K ist vorteilhaft, denn es gilt für die Funktionen $\Phi(x)$ aus Gl. (27).

$$(33) \quad K \Phi(x) = -\kappa \Phi(x)$$

IN der Differentialoperatorentwicklung des Austauschterms in Gl. (25) treten Operatorprodukte $\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x$ und $\vec{y} \cdot \vec{\nabla}_x$ auf. Dafür gilt

$$\begin{aligned}
 \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x &= r_x \frac{\partial}{\partial r_x} \\
 \vec{y} \cdot \vec{\nabla}_x &= \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{r_x} \frac{\partial}{\partial r_x} - i \frac{\vec{y} \cdot (\vec{x} \times \vec{L})}{r_x^2} \\
 (34) \quad &= \frac{-4\pi}{\sqrt{3}} \sum_{m, \tilde{m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & \tilde{m} & 0 \end{pmatrix} r_y Y_{1m}(\Omega_y) Y_{1\tilde{m}}(\Omega_x) \frac{\partial}{\partial r_x} \\
 &+ \frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{r_y}{r_x} \sum_{\substack{m, \tilde{m} \\ n, \tilde{n}}} (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & \tilde{m} & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ n & \tilde{n} & 0 \end{pmatrix} Y_{1m}(\Omega_y) Y_{1\tilde{m}}(\Omega_x) L_{\tilde{n}}
 \end{aligned}$$

Für die dualen Tensoren, die durch die Spinwellenfunktionen gebildet werden, gilt

$$\begin{aligned}
 \chi_n \chi_n^+ &= \sum_v \frac{(-1)^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ n & -n & -v \end{pmatrix} \sigma_v \\
 (35) \quad &+ \frac{(-1)^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ n & -n & 0 \end{pmatrix} 1, \quad \chi_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } n = +\frac{1}{2} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } n = -\frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Alle diese Formeln werden in Gl. (25) eingesetzt. Die Integrale über Produkte von mehreren Kugelfunktionen liefern Summen über 3-j Symbole¹³⁾. Die Spinorprodukte lassen sich ebenfalls auf 3-j Symbole und Dirac-Matrizen zurückführen. Wenn man die 3-j Symbole umkoppelt zu 6-j Symbolen und diese explizit auswertet¹⁶⁾, erhält man die Gleichung für die Radialwellenfunktionen f und g. Sie ist hier mit Hilfe von Dirac Matrizen ausgedrückt.

$$\left[-i \gamma_5 \sigma_r \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\beta k}{r} + \frac{1}{r} \right) - e V + \gamma_0 m \right] \Phi_E(x)$$

$$+ \frac{e^2}{4\pi} \int r_z^2 dr_z \frac{\sum_{\epsilon, k} |k| \{ |g_{\epsilon k}(r_z)|^2 + |f_{\epsilon k}(r_z)|^2 \}}{\text{Max}(r_x, r_z)} \Phi_E(x)$$

$$- \frac{e^2}{8\pi} \sum_{\epsilon, k} |k| \left\{ 2 (g_{\epsilon k}(r_x) G_{\epsilon k}^*(r_x) - f_{\epsilon k} \bar{f}_{\epsilon k}^*) \delta_0 \right.$$

$$- (g_{\epsilon k}(r_x) G_{\epsilon k}^*(r_x) + f_{\epsilon k}(r_x) \bar{f}_{\epsilon k}^*(r_x)) 1$$

$$+ i (g_{\epsilon k}(r_x) \bar{f}_{\epsilon k}^*(r_x) - f_{\epsilon k}(r_x) G_{\epsilon k}^*(r_x)) \alpha_{r_x}$$

$$(36) + \left[\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2k+1} (G(\epsilon, k, k, l+1) - G(\epsilon, k, k, l-1)) \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{k(k-1)}}{2k-1} (G(\epsilon, -k, -k, l+1) - G(\epsilon, -k, -k, l-1)) \right] 2 \text{sign}(k) \gamma_0 \frac{\partial}{\partial r_x}$$

$$- (g_{\epsilon k}(r_x) G_{\epsilon k}^*(r_x) r_x - f_{\epsilon k}(r_x) \bar{f}_{\epsilon k}^*(r_x) r_x) 2 \delta_0 \frac{\partial}{\partial r_x}$$

$$- \left[\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2k+1} (G(\epsilon, k, k, l+1) - G(\epsilon, k, k, l-1)) \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{k(k-1)}}{2k-1} (G(\epsilon, -k, -k, l+1) - G(\epsilon, -k, -k, l-1)) \left. \right] \text{sign}(k) 1 \frac{\partial}{\partial r_x}$$

$$+ (g_{\epsilon k}(r_x) G_{\epsilon k}^*(r_x) r_x + f_{\epsilon k}(r_x) \bar{f}_{\epsilon k}^*(r_x) r_x) 1 \frac{\partial}{\partial r_x}$$

$$+ \left[\frac{2k}{2k-1} G(\epsilon, k, -k, l) + \frac{2(k-1)}{2k-1} G(\epsilon, k, -k, l - 2 \text{sign}(k)) \right.$$

$$\left. - \frac{2k}{2k+1} G(\epsilon, -k, k, l) - \frac{2(k+1)}{2k+1} G(\epsilon, -k, k, l + 2 \text{sign}(k)) \right] \frac{i \alpha_r}{2} \frac{\partial}{\partial r_x}$$

$$\begin{aligned}
 & + (g_{\varepsilon\kappa}(r_x) \tilde{F}_{\varepsilon\kappa}(r_x) r_x - f_{\varepsilon\kappa}(r_x) G_{\varepsilon\kappa}^*(r_x) r_x) i \alpha_{r_x} \frac{\partial}{\partial r_x} \\
 & + \left[\frac{\kappa+1}{2\kappa+1} (G(\varepsilon, \kappa, \kappa, \ell+1) - G(\varepsilon, \kappa, \kappa, \ell-1)) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\kappa-1}{2\kappa-1} (G(\varepsilon, -\kappa, -\kappa, \ell+1) - G(\varepsilon, -\kappa, -\kappa, \ell-1)) \right] \frac{\text{sign}(\kappa)}{2} \frac{\gamma_0 K - 1}{r} \\
 & - \left[\frac{\kappa-1}{2\kappa-1} (G(\varepsilon, \kappa, -\kappa, \ell) - G(\varepsilon, \kappa, -\kappa, \ell - 2 \text{sign}(\kappa))) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\kappa+1}{2\kappa+1} (G(\varepsilon, -\kappa, \kappa, \ell) - G(\varepsilon, -\kappa, \kappa, \ell + 2 \text{sign}(\kappa))) \right] \frac{i \alpha_{r_x}}{2} \frac{\gamma_0 K - 1}{r} \\
 & + 2 (g_{\varepsilon\kappa}(r_x) \tilde{G}_{\varepsilon\kappa}^*(r_x) - f_{\varepsilon\kappa}(r_x) \tilde{F}_{\varepsilon\kappa}^*(r_x)) \gamma_0 E \\
 & - (g_{\varepsilon\kappa}(r_x) \tilde{G}_{\varepsilon\kappa}^*(r_x) - f_{\varepsilon\kappa}(r_x) \tilde{F}_{\varepsilon\kappa}^*(r_x)) 1 E \\
 & + i (g_{\varepsilon\kappa}(r_x) \tilde{F}_{\varepsilon\kappa}^*(r_x) - f_{\varepsilon\kappa}(r_x) \tilde{G}_{\varepsilon\kappa}^*(r_x)) \alpha_{r_x} E \} \Phi_E(x) \\
 & = E \Phi_E(x)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 G_{\varepsilon\kappa}^*(r) &= \int_0^\infty r_z^2 dr_z \quad w_{\ell(\kappa)}(r, r_z, \varepsilon) g_{\varepsilon\kappa}^*(r_z) \\
 \tilde{F}_{\varepsilon\kappa}^*(r) &= \int_0^\infty r_z^2 dr_z \quad w_{\ell(-\kappa)}(r, r_z, \varepsilon) f_{\varepsilon\kappa}^*(r_z)
 \end{aligned}$$

$\tilde{G}_{\varepsilon\kappa}^*$ und $\tilde{F}_{\varepsilon\kappa}^*$ sind genauso definiert, nur daß dann die Potentiale $\tilde{w}_1$ (siehe Gl. (31)) verwendet werden.

$$h, K : g_{\epsilon, K}(r_x) \int r_z^2 dr_z g_{\epsilon, K}^*(r_z) w_\lambda(r_1, r_2, \epsilon) r_z$$

$$|K-K| : \quad \quad \quad f_{\epsilon, K}^*(r_z) \quad \quad \quad "$$

$$G(\epsilon, K, \tilde{\kappa}, \lambda) = \begin{cases} -K, K : f_{\epsilon, K}(r_x) \int \quad g_{\epsilon, K}^*(r_z) \quad \quad \quad " \\ -K, -K : \quad \quad \quad f_{\epsilon, -K}^*(r_z) \quad \quad \quad " \end{cases}$$

Der erste Term in Gl. (36) ist die Dirac-Gleichung mit äusserem Feld; der Zweite das induzierte Potential und der umfangreiche Rest der Austauschterm in der Näherung nach Gl. (24). Um klarer zu machen, welche Typen von Operatoren im Austauschterm auftreten, schreiben wir ihn abgekürzt hin.

$$(37) \quad \begin{aligned} & \tilde{V}_1 \gamma_0 + \tilde{V}_2 1 + \tilde{V}_3 i \alpha_r \\ & + \tilde{V}_4 \gamma_0 \frac{d}{dr} + \tilde{V}_5 1 \frac{d}{dr} + \tilde{V}_6 i \alpha_r \frac{d}{dr} + \tilde{V}_7 \frac{r_0 K - 1}{r} + \tilde{V}_8 i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Potentiale $\tilde{V}_1$ bis $\tilde{V}_8$ sind in Gl. (36) ausgeschrieben.

V. Renormierungsprobleme

Wie üblich in lokalen Feldtheorien^{2,3,4,5}) treten auch in dieser Theorie Divergenzen auf. In der Gl. (18) divergiert das Integral $ie^2 \int d^4z \gamma_k G(x,z) \gamma_k D_0(z,x) G(z,y)$ bei der z -Integration in der Gegend $z=x$ und im Integral $-ie^2 \int d^4z D_0(x-z) \gamma_k \text{Tr}(\gamma_k G(z,z)) G(x,y)$ divergiert die Spur über die Greensfunktion. Dieselben Divergenzen treten auch in Gl. (20) auf, wenn man die Summen über das volle Spektrum der Zustände p summiert. In einer numerischen Behandlung von Gl. (20) wird natürlich nicht voll aufsummiert. Man muß eine Abschneideenergie einführen. Sie wird so gewählt, daß die vernachlässigten Zustände keinen Einfluß mehr auf die betrachteten physikalischen Effekte (z.B. die Energien der Bindungszustände) haben. Nach Einführung einer solchen Abschneideenergie haben wir keine divergierenden Summen mehr. Dennoch bleibt ein Renormierungsproblem, denn die Summen enthalten Terme, die die Ladung und die Masse des Elektrons verändern. Das sind übrigens genau die Terme, die bei der vollen Summation divergieren. Haben wir diese Terme extrahiert, ist die verbleibende Theorie unabhängig von einer Abschneideenergie; d.h. sie konvergiert, wenn wir die Abschneideenergie gegen unendlich gehen lassen.

Die folgenden Überlegungen wurden mit Gl. (18) durchgeführt, da wir diese leicht in Feynmangraphen entwickeln können. Die Resultate des Renormierungsprogrammes sind natürlich auch für die Gleichung (20) richtig, denn die beiden Gleichungen sind ja äquivalent.

Wie in Kapitel III schon erläutert, werden die Gleichungen (18) bzw. (20) in einem Iterationsverfahren gelöst. Das läßt sich graphisch so darstellen

$$\text{---} \bigcirc G_0 \text{---} = \text{---}$$

$$\text{---} \bigcirc G_{n+1} \text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc G_{n+1} \text{---} + \text{---} \bigcirc M_n \text{---} \bigcirc G_{n+1} \text{---}$$

$$(38) \quad \begin{array}{l} \text{---} \bigcirc G_n \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{l} \text{---} \bigcirc G_0 \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{l} \text{---} \bigcirc G_n \text{---} \\ \text{---} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \text{---} \bigcirc G_0 \text{---} \\ \text{---} \end{array} = V_{\text{ext}} \quad , \quad \begin{array}{l} \text{---} \bigcirc G_n \text{---} \\ \text{---} \end{array} = V_n$$

$$\text{---} \bigcirc M_n \text{---} = \text{---} \bigcirc G_n \text{---} , \quad \begin{array}{l} \text{---} \bigcirc G_n \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \tilde{V}_n = V_n - V_0$$

Die Renormierung wird in jedem Iterationsschritt durchgeführt, indem man von V_n und M_n die Teile subtrahiert, die ohne eine Abschneideenergie divergieren würden. Nach der Subtraktion erhält man endliche V_n und M_n . Mit diesen wird der nächste Iterationsschritt durchgeführt. Die Feynmandarstellung des ersten Iterationsschrittes ist

$$(39) \quad G_0 = \text{---} \quad M_0 = \text{---} \quad V_0 = \begin{array}{l} \text{---} \bigcirc G_0 \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

wobei  divergiert. Der renormierte Graph ist 

$$G_1 = \text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} \text{---} G_1 + \text{---} \boxed{1} \text{---} G_1$$

$$= \text{---} + \text{---} \boxed{1} \text{---} + \boxed{1} \text{---} \boxed{1} \text{---} + \text{---} \boxed{1} \text{---} \boxed{1} \text{---} \boxed{1} \text{---}$$

+ alle Graphen ohne äußere Feldlinien

$$+ \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \text{---} \boxed{1} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} \boxed{1}$$

+ alle Graphen mit einer äußeren Feldlinie

$$+ \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots \text{ alle Graphen mit mehr als einer} \\ \text{äußeren Feldlinie}$$

(39)

$$M_1 = \underbrace{\text{---} + \text{---} \boxed{1} \text{---} + \dots + \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots}_{M_{1,0}} + \underbrace{\text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots}_{M_{1,1}}$$

$$+ \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots + \dots$$

$M_{1,2}$

$M_{1,n}; n \geq 3$

$$\tilde{V}_1 = \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \text{---} \boxed{1} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots + \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

Bei der Darstellung von $\tilde{V}_1$ mag überraschen, daß nur Graphen mit einer ungeraden Anzahl von äußeren Feld-Linien, und damit einer geraden Anzahl von äußeren Photonenlinien, berücksichtigt wurden. Das liegt an Furrys Theorem^{2,3,4,5)} das besagt, daß alle Graphen mit einem geschlossenen Elektronenring und einer ungeraden Anzahl von äußeren Photonenlinien verschwinden.

Die erste Divergenz taucht im Graphen M_0 auf. M_0 ist der einfachste Elektronenselbstenergiegraph (siehe Ref. 2,3,4). Zur näheren Betrachtung schreiben wir ihn im Impulsraum hin.

$$(40) \quad M_0(p) = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \gamma_\mu \frac{1}{p - k - m + i\varepsilon} \gamma_\mu$$

Es wird über vier k 's integriert ($d^4 k$); dagegen stehen drei k -Potenzen im Nenner. Das Integral divergiert also linear. Wenn man $M_0(p)$ nach p differenziert, verringert sich die Divergenz um einen Grad.

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{p - k - m} = - \frac{1}{p - k - m} \gamma_\mu \frac{1}{p - k - m}$$

Wir haben dann vier k -Potenzen im Zähler gegen vier im Nenner; das ergibt eine logarithmische Divergenz. Alle höheren Ableitungen von $M_0(p)$ konvergieren, da jede weitere Ableitung einen Faktor $1/(p-k-v)$ zusätzlich liefert. Nach diesen Überlegungen läßt sich $M_0(p)$ schreiben als

$$(42) \quad M_0(p) = M_0(p_0) + (p_\mu - p_{0\mu}) \left. \frac{\partial}{\partial p_\mu} M_0(p) \right|_{p=p_0} + M_0^{\text{res}}(p)$$

Die ersten beiden Terme divergieren. M_0^{res} ist endlich. Die Zerlegung (42) ist nicht eindeutig. Sie hängt von der Wahl des p_0 ab. Um dies festzulegen fordern wir, daß $M_0^{\text{res}}(p)$ auf der Massenschale, d.h. für $p^2 = m^2$, verschwindet, damit es die physikalische Masse des Elektrons nicht beeinflussen kann. Da M_0^{res} in einer Taylorentwicklung nur Terme $(p-p_0)^n$ mit $n \geq 2$ enthält, ist das erfüllt, wenn p_0 auf der Massenschale liegt; d.h. $p_0^2 = m^2$. Wir wählen speziell $p_0 = (m, 0, 0, 0)$. Wenn wir die Gl. (42) wieder in den Koordinatenraum zurücktransformieren, erhalten wir

$$M_0^{\text{res}}(x-y) = M_0(x-y) - \int d^4y M_0(x-y) e^{-im(t_y-t_x)}$$

(43)

$$- \int d^4y M_0(x-y) e^{-im(t_y-t_x)} (y-x)_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Da M_0 nur von der Differenz $x - y$ abhängt, sind die Integrale unabhängig von x .

Was hier subtrahiert wird, entspricht genau der Entwicklung des Integralkernes M_0 in Differentialoperatoren nach Gl. (25). Nur daß dort statt mit der Zeitkoordinate, wie hier, mit der Energiekoordinate gearbeitet wird. Damit ist auch der Grund klar, warum, in Gl. (25) um die Energie $\xi_D = m$ entwickelt wurde. Das ist genau die Entwicklung um einen Impuls auf der Massenschale.

Im nächsten Iterationsschritt zerlegen wir M_1 in Gruppen von Graphen $M_{1,0}$, $M_{1,1}$, ..., die nach der Zahl der äußeren Feldlinien klassifiziert werden. $M_{1,0}$ ist wieder ein Elektronenselbstenergieanteil. Er wird genauso renormiert wie M_0 . Aber da wir M_1 numerisch in geschlossener Form berechnen, kennen wir die Zerlegung in die $M_{1,n}$ nicht explizit. Wir müssen nach einer Möglichkeit suchen den divergenten Anteil von $M_{1,0}$ in M_1 zu identifizieren. Das äußere Potential V_0 ist zeitunabhängig und verhält sich asymptotisch für große räumliche Abstände r wie ein Coulombpotential. Für solche Potentiale sind die Integrale

$$(44) \quad \int d^4y M_{1,n}(x,y) e^{-im(t_y-t_x)}; \int d^4y M_{1,n}(x,y) e^{-im(t_y-t_x)} (y-x)_\mu$$

für $n \geq 1$ ebenfalls zeitunabhängig und gehen gegen 0 für große r . (Denn sie sind durch das äußere Potential, siehe Gl. (39), sozusagen am Zentrum festgebunden.) Für $n=0$ sind diese Integrale unabhängig von der Zeit und von r . Das bedeutet, sie verschwinden auch nicht für große r .

Damit können wir den divergenten Beitrag von $M_{1,0}$ in M_1 identifizieren, indem wir zum Grenzfall großer r gehen. Denn Beiträge von den Graphen $M_{1,n}$ mit $n \geq 1$ verschwinden in diesem Limit. Also sieht das von den Elektronenselbstenergiedivergenzen befreite M_1^{res} folgendermassen aus:

$$M_1^{\text{res}}(x, y) = M_1(x, y)$$

(45)

$$- \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \int d^4 y M_1(x, y) e^{-im(t_y - t_x)} \left(1 + (y - x)_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)$$

In allen weiteren Schritten wird die Elektronenselbstenergiedivergenz in derselben Art und Weise, durch Einführung eines M_n^{res} , beseitigt.

Der nächste divergente Anteil an M_1 steckt in $M_{1,1}$. Greifen wir den einfachsten Graphen davon heraus und notieren ihn wieder im Impulsraum.

$$M_{1,1}^0 = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$$

(46)

$$\cdot \delta_\mu \frac{1}{p' - k - m + i\epsilon} V_0(p' - p) \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} \delta^\mu$$

$M_{1,1}^0$ enthält eine logarithmische Divergenz ($d^4 k$ im Zähler und vier Potenzen im Nenner). Wenn man $M_{1,1}$ ähnlich wie M_0 entwickelt, sieht man, daß man die Divergenz in der Form $A_1 V_0$ abspalten kann, wobei V_0 das äußere Poten-

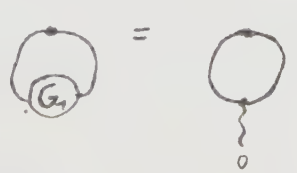
tial und A_1 eine divergente Konstante ist. Die anderen Graphen in $M_{1,1}$ lassen sich in ähnlicher Weise behandeln, denn die Einschübe von renormierten Elektronenselbstenergiegraphen ändern den Divergenzgrad des Gesamtgraphen gegenüber $M_{1,1}^0$ nicht. Insgesamt kann die Divergenz in $M_{1,1}$ in der Form $A_1 V_0$ abgespalten werden.

Alle weiteren Terme $M_{1,n}$ mit $n \geq 2$ konvergieren. Das ist klar, denn der $d^4 k$ Integration im Zähler stehen mindestens 5 k-Potenzen im Nenner gegenüber; vom Photonenpropagator kommen 2 Potenzen von den mindestens 3 Elektronenpropagatoren mindestens 3 Potenzen. (Eine genauere Rechtfertigung dieses Abzählverfahrens findet man in Ref. 2 Anhang A5).

Bei $\tilde{V}_1 (= V_1 - V_0)$ enthalten alle Graphen mit nur einer äußeren Feldlinie Divergenzen. Die renormierten Elektronenselbstenergieeinschübe haben wiederum keinen Einfluß auf den Divergenzgrad und das Renormierungsverfahren. Deshalb genügt es den einfachsten dieser Graphen zu betrachten.

$$(47) \quad V_{1,0}^0 = e^2 \frac{\gamma^\mu}{q^2 + i\varepsilon} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{k - m + i\varepsilon} V_0(q) \frac{1}{k - q - m + i\varepsilon} \right)$$

Er enthält eine quadratische Divergenz. Das induzierte Potential $\tilde{V}_1$ berechnet sich aus der induzierten Ladung $\tilde{\rho}_1(x)$ durch Anwendung des freien Photonpropagators auf $\tilde{\rho}_1(x)$. Damit ist die graphische Darstellung für $\tilde{\rho}_1(x)$.

$$(48) \quad \tilde{\rho}_1(x) = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \dots$$


Dieses $\tilde{\varphi}_1(x)$ ist als messbare physikalische Größe eichinvariant; d.h. $\tilde{\varphi}_1(x)$ wird nicht verändert, wenn in der Gleichung für G_1 noch ein zusätzliches Potential der Form

$$(49) \quad a^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x)$$

($f(x)$ beliebig) addiert wird. Nun wird aber in der graphischen Entwicklung für V_1 (siehe Gl. (39)) in den einzelnen Entwicklungstermen die Eichinvarianz verletzt. Die Dichte $\varphi_{1,0}(x)$ zum Beispiel

$$(50) \quad \varphi_{1,0}(x) =$$


ist nicht eichinvariant. Wie in den Renormierungstheorien üblich, wird diese Eichinvarianz erzwungen, indem man die nicht eichinvarianten Terme wegläßt. Dabei verschwindet der quadratisch divergente Anteil von $V_{1,0}$ bzw. $\varphi_{1,0}$. Es verbleibt ein Integral mit einem logarithmisch divergenten Anteil. Der divergente Term kann in der Form $B_0 V_0$ abgespalten werden, wobei B_0 eine divergente Konstante ist. B_0 wird so gewählt, daß der endliche Rest von $V_{1,0}$ im Grenzfall weicher Photonen (Photonenimpuls $q \rightarrow 0$) verschwindet. Für die anderen Graphen mit nur einer äußeren Feldlinie, aber weiteren Elektronenselbstenergieeinschüben, gelten dieselben Überlegungen. Das endgültige B_0 enthält dann die Summe der Beiträge aller dieser Graphen.

Die nächste Gruppe von Graphen ist die mit drei äußeren Feldlinien. Hier erwartet man beim Abzählen der Impulspotenzen eine logarithmische Divergenz. Aber auch dieses Integral enthält Teile, die die Eichinvarianz verletzen. Wenn man diese wieder wegläßt, verschwindet damit auch die logarithmische Divergenz und es bleibt ein konvergentes Integral übrig. Alle Graphen höherer Ordnung in den äußeren Feldlinien konvergieren. Insgesamt enthält also das Potential V_1 einen divergenten Anteil der Form $B_0 V_0$.

Diese renormierten Korrekturpotentiale V_1 und M_1 kann man nun verwenden, um im nächsten Iterationsschritt G_2 , V_2 und M_2 zu berechnen. M_2 und V_2 , die nun etwas komplizierter aussehen, könnte man wieder explizit renormieren und damit weiteriterieren. Die Integrale, die die Renormierungskonstanten A und B bestimmen werden aber schnell sehr umfangreich, insbesondere durch die hohe Zahl von Elektronenselbstenergieeinschüben. Nun müssen wir daran erinnern, daß wir den Integraloperator im Austauschterm nach Gl. (23) nähern und daß der Elektronenselbstenergieanteil in dieser Näherung bei der Renormierung des Graphen M_n nach Gl. (20) gerade vollständig subtrahiert wurde. Das bedeutet, daß in der betrachteten Näherung Elektronenselbstenergiegraphen überhaupt keine Rolle mehr spielen. Im folgenden wird eine geschlossene Renormierung der Theorie unter Vernachlässigung aller Elektronenselbstenergiegraphen angegeben.

Zuerst untersuchen wir die Renormierung des Austauschterms und nehmen dazu an, daß der direkte Term in jedem Iterationsschritt ein renormiertes Potential V_n liefert (in V_n soll bereits das äußere Potential V_0 enthalten sein). Der erste Iterationsschritt sieht dann folgendermaßen aus:

$$\text{---} \bigcirc G_0 \text{---} = \text{---}$$

$$(51) \quad \text{---} \bigcirc G_n \text{---} = \text{---} + \text{---} \underset{\substack{\text{wavy line} \\ 0}}{\downarrow} + \text{---} \bigcirc G_n^r \text{---}$$

damit folgt

$$M_1 = \text{cloud} \underset{\substack{\text{wavy line} \\ 0}}{\downarrow} + \text{cloud} \bigcirc G_1^r$$

$$(52) \quad \text{Div}(M_1) = \text{Div} \left(\text{cloud} \underset{\substack{\text{wavy line} \\ 0}}{\downarrow} \right) = A_1 V_0$$

$$\text{Fin}(M_1) = \boxed{1} \underset{\substack{\text{wavy line} \\ 0}}{\downarrow} + \text{cloud} \bigcirc G_1^r ; \quad \boxed{1} \underset{\substack{\text{wavy line} \\ 0}}{\downarrow} = \text{Fin} \left(\text{cloud} \underset{\substack{\text{wavy line} \\ 0}}{\downarrow} \right)$$

G_1^r soll alle Graphen enthalten die nicht explizit aufgeführt sind; hier ist es die Summe aller Graphen mit mehr als einer äußeren Feldlinie. Im allgemeinen soll G_n^r die Summe aller Terme sein, die in der Formel für G_n nicht explizit aufgeführt wurden. $\text{Div}(X)$ soll den divergenten Anteil von Graph X bedeuten, $\text{Fin}(X)$ den endlichen.

$$(57) \quad T_{in}(M_n) = \sum_{k=1, n} \boxed{k} + \sum_{k=1, n} \text{diagram with } G_k^r \text{ and } n+1-k \text{ external lines}$$

$$(58) \quad \text{diagram with } G_{n+1} = \text{diagram with } G_k^r \text{ and } n+1-k \text{ external lines}$$

Damit ist die Gl. (54) durch Induktion bewiesen.

Soweit der Austauschterm. Der direkte Term, also das induzierte Potential, wirft größere Probleme auf. Zuerst benötigen wir einige Hilfssätze.

$$(59) \quad \text{diagram with } n \text{ external lines} = \sum_{k=0, n} D_k \boxed{n-k} \quad \left(\boxed{0} = \text{diagram with } 0 \text{ external lines} \right)$$

Dabei ist D_k folgendermaßen definiert:

$$(60) \quad D_0 = 1, \quad D_1 = A_1, \quad D_n = \sum_{k=1}^n A_k D_{n-k}$$

Durch Auflösen von Gl. (59) nach den endlichen Vertexteilen erhält man

$$(61) \quad \boxed{n} = \text{Diagram with } n \text{ external lines} - \sum_{k=1, n} A_k \text{Diagram with } k \text{ external lines}$$

Beide Sätze sind leicht mit vollständiger Induktion zu beweisen, wenn man sich an die Definitionsgleichung (53) erinnert. Ein weiterer wichtiger Hilfssatz ist

$$(62) \quad \text{Diagram with } n \text{ external lines} = \sum_{m=0, n} \left[\sum_{i=0, n-m} D_i D_{n-m-i} \right] (B_m \text{Diagram with } m \text{ external lines} + \boxed{m})$$

Dabei sind die B_n divergente Konstanten und die Graphen $\boxed{m}$ die endlichen Restgraphen, die übrigbleiben, wenn man die divergenten Anteile abgespalten hat. Um diesen Satz zu beweisen benötigen wir die Ward-Identität, speziell für den Photonenpolarisationsgraphen Π (siehe Ref. 2, Kap. 10). Zu diesem Polarisationsgraphen definieren wir ein Δ durch

$$(63) \quad \frac{\partial \Pi^*(k)}{\partial k_\mu} = i \Delta_\mu(k)$$

Die graphische Darstellung von Δ erhält man aus der vom Polarisationsgraphen Π als die Summe aller Graphen, bei denen jeweils eine Photonenlinie mit Impuls 0 an die Elektronenlinien des Graphen Π hinzugefügt ist. Das soll in folgendem Beispiel klar gemacht werden (Polarisationsgraphen sind so definiert, daß sie die äußeren Photonenlinien nicht mehr enthalten) :

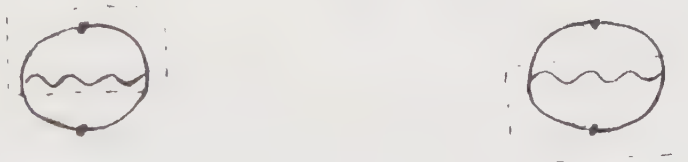
$$\Pi_{\text{Box}} = \text{Diagram 1}$$


(64)

$$\Delta_{\text{Box}} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}$$


Die Größe Δ wird eingeführt, um das Problem der überlappenden Divergenzen zu meistern. Zum Beispiel enthält der Graph Π_{Box} einen divergenten Vertexanteil, den man auf zwei verschiedenen Weisen einordnen kann.

(65)



Das wirft Probleme auf, wenn man die divergenten Einschübe renormieren will. Durch die Einführung des Graphen Δ_{Box} ist das Problem gelöst. Hier ist in allen vier Graphen die Abspaltung der Vertexdivergenz eindeutig durchführbar.

Der Graph Δ selbst enthält eine Divergenz. Wenn alle divergenten Einschübe extrahiert sind, kann Δ aufgespalten

werden in einen endlichen und einen divergenten Anteil in der Form

$$\Delta_\mu(k) = 2 i k_\mu B + \text{Fin}(\Delta_\mu(k))$$

(66)

$$\text{Div}(\Delta_\mu(k)) = 2 i k_\mu B$$

Nun bilden wir für den Polarisationsgraphen in Gl. (62) den zugehörigen Δ -Graphen. Er ist

$$\sum_{i=0, n} \left\{ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right\} =$$

Diagram 1: A circle with a wavy line entering from the left and a wavy line exiting to the right. Inside the circle, there is a horizontal line with a dot at the left end and a wavy line connecting it to the right end. The label 'n-i' is written below the circle.

Diagram 2: A circle with a wavy line entering from the left and a wavy line exiting to the right. Inside the circle, there is a horizontal line with a dot at the right end and a wavy line connecting it to the left end. The label 'n-i' is written below the circle.

(67)

$$\sum_{m=0, n} \left[\sum_{i=0, n-m} D_i D_{n-m-i} \right] \sum_{\alpha=0, m} \left\{ \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \right\}$$

Diagram 3: A circle with two wavy lines entering from the left and two wavy lines exiting to the right. Inside the circle, there are two horizontal lines. The top line has a dot at the left end and is labeled α . The bottom line has a dot at the right end and is labeled $m-\alpha$.

Diagram 4: A circle with two wavy lines entering from the left and two wavy lines exiting to the right. Inside the circle, there are two horizontal lines. The top line has a dot at the right end and is labeled α . The bottom line has a dot at the left end and is labeled $m-\alpha$.

Wenn wir die Aufspaltung in einen endlichen und einen divergenten Anteil definieren als

(68)

$$\sum_{\alpha=0, m} \left\{ \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \right\} = 4 i k_\mu B_m + i \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\text{Diagram 5} \right),$$

Diagram 5: A square with a dot at the center and a wavy line entering from the left and a wavy line exiting to the right. The label 'm' is written below the square.

dies in Gl. (67) einsetzen und zu diesem Δ nach Gl. (63) den zugehörigen Polarisationsgraphen Π bilden (durch Integration der Differentialgleichung (63)) erhalten wir die zu beweisende Gleichung (62).

Mit den Gleichungen (61) und (62) erhalten wir nach einigen Umformungen.

$$(69) \quad \text{Diagram: a circle with a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled 'n' inside the circle} = \sum_{m=0, n} D_{n-m} (B_m \text{Diagram: a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled 'm' inside the circle})$$

Nachdem wir die obigen Hilfssätze eingeführt und bewiesen haben, gehen wir zurück zu dem Problem der Separation der Divergenzen in den Potentialen V_n . Aus Gl. (56) entnehmen wir V_1 .

$$V_1 = \text{Diagram: a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled '0' inside the circle} + \text{Diagram: a circle with a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled 'G_1' inside the circle} = \text{Diagram: a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled '0' inside the circle} + \text{Diagram: a circle with a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled '0' inside the circle} + \text{Diagram: a circle with a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled 'G_1^r' inside the circle}$$

(70)

$$\text{Div}(V_1) = B_0 \text{Diagram: a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled '0' inside the circle}$$

$$\text{Fin}(V_1) = \text{Diagram: a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled '0' inside the circle} + \text{Diagram: a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled '0' inside the circle} + \text{Diagram: a circle with a wavy line entering from the top and a wavy line exiting from the bottom, with a box labeled 'G_1^r' inside the circle}$$

Der endliche Anteil von V_n ist

$$(71) \quad \text{Fin}(V_n) = \sum_{i=0, n-1} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \boxed{i} \\ | \\ \text{---} \\ n-1-i \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \boxed{i} \\ | \\ \bigcirc \\ \text{---} \\ G_{n-1}^r \end{array} \right) + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \vdots \\ | \\ 0 \end{array}$$

Das wird mit vollständiger Induktion bewiesen. Die Verankerung für $n=1$ ist mit Gl. (70) schon gegeben. Um V_{n+1} zu berechnen, benutzen wir $\text{Fin}(V_n)$ von Gl. (71)' und $\text{Fin}(M_n)$ von Gl. (61). Daraus folgt für V_{n+1} .

$$(72) \quad V_{n+1} = \sum_{i=0, n} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ \boxed{i} \\ | \\ \text{---} \\ n-i \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ \boxed{i} \\ | \\ \bigcirc \\ \text{---} \\ G_{n+1}^r \end{array} \right) + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \vdots \\ | \\ 0 \end{array}$$

Mit den Hilfssätzen (69) für den ersten Term und (60) für den Zweiten erhalten wir, nach einigen algebraischen Umformungen, die Zerlegung in den endlichen und den divergenten Anteil.

$$(73) \quad F_m(V_{n+1}) = \sum_{i=0, n} \left(\begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ n-i \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 2} \\ G_{n+1-i} \end{array} \right) + \left\{ \begin{array}{c} \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Div}(V_{n+1}) = B_0 \left\{ \begin{array}{c} \\ n \end{array} \right. + \sum_{i=1, n-1} \left(\sum_{m=0, i-1} D_{i-m} B_m + D_{i+1} \right) \left\{ \begin{array}{c} \\ n-i \end{array} \right.$$

(74)

$$+ \left(\sum_{m=0, n} D_{n-m} B_m - \sum_{m=1, n} D_m \right) \left\{ \begin{array}{c} \\ 0 \end{array} \right.$$

Damit ist der Induktionsbeweis für Gl. (71) beendet. Für uns von besonderem Interesse sind die Ausdrücke für die divergenten Anteile von V_{n+1} in Gl. (74) und für M_n in Gl. (56).

Die divergenten Konstanten A_n und B_n (und damit auch D_n) sind wohldefiniert. Wenn man eine Abschneideenergie eingeführt hat, kann man sie im Prinzip berechnen, indem man die definierenden Impulsraumintegrale ausführt. Das ist aber, wie schon gesagt, recht kompliziert. Im vorliegenden Fall geht es auch einfacher. Die Renormierung soll gewährleisten, daß die renormierten Gleichungen asymptotisch für große Raumabstände r in die Diracgleichung mit äußerem Feld übergehen, sich also asymptotisch wie die Diracgleichung mit einem Coulombpotential der Ladung $Z - E$ verhalten: Dabei ist Z die Kernladung und E die Zahl der Elektronen im Atom. Die Ionisation des Atoms ist dann $I = Z - E$.

Das ursprüngliche äußere Kernpotential trägt die Ladung Z bei; der direkte Term soll die Ladung $-E$, die Ladung der Atomelektronen, beitragen; der letzte Term, der Austauschterm, der ja auch einen Anteil wie ein Coulombpotential enthält, (das ist in der Gleichung (37) der Term $V_2(x) \cdot 1$), soll die Ladung 0 beitragen. Die Ladung Q , die das asymptotische Verhalten bestimmt, wird berechnet, indem man zum gegebenen Potential $V(x)$ die Ladungsdichte $\rho(x) = \frac{1}{4\pi} \Delta V(x)$ konstruiert und diese Ladungsdichte über den Raum integriert.

$$(75) \quad Q = \int d^3x \rho(x) = \int d^3x \frac{1}{4\pi} \Delta V(x)$$

Nun sei Q_n die Ladung des unrenormierten Potentials V_n (Gl.(38)), Q_n^r die des renormierten Potentials $Fin(V_n)$ (Gl.(71)). Q_n^r ist im allgemeinen $Z-E$, da $Fin(V_n)$ ja auch das äußere Potential mit enthält. Man könnte nun immer $Q_n^r = Z-E$ einsetzen; aber wenn wir Q_n^r nicht näher spezifizieren, beschreiben wir damit auch Rechnungen, bei denen zwischen den einzelnen Iterationsschritten die Kernladung oder die Elektronenzahl geändert wird. Schließlich soll Q_n^{ex} die Ladung zum Coulombanteil des unrenormierten Austauschterms sein.

Die Forderung, daß der Coulombanteil des renormierten Austauschterms zur Ladung 0 gehören soll, bedeutet, daß die Ladung Q_n^{ex} in die divergenten Anteile des Austauschterms gesteckt wird.

$$(76) \quad Q_n^{\text{ex}} - \sum_{k=1, n} A_k Q_{n-k}^r = 0$$

Damit haben wir im n -ten Iterationsschritt n Gleichungen für die n Unbekannten A_n . Die A_n sind somit ausreichend bestimmt.

Das Potential $\text{Fin}(V_n)$ soll die Ladung Q_n^r tragen. Die Differenz zur Ladung Q_n des unrenormierten Potentials V_n wird auch hier in die divergenten Anteile (Gl. (74)) gesteckt.

$$(77) \quad Q_n - B_0 Q_{n-1}^r - \sum_{i=1, n-2} \left(\sum_{m=0, i-1} D_{i-m} B_m + D_{i+1} \right) Q_{n-i-1}^r - \left(\sum_{m=0, n-1} D_{n-1-m} B_m - \sum_{m=1, n-1} D_m \right) Q_0^r = 0$$

Die Konstanten A_n sind bekannt; damit nach Gl. (60) auch die D_n . Dann bleiben mit den n Gleichungen (77) die restlichen n Unbekannten B_n zu bestimmen.

Damit ist für das eingeschränkte Problem, ohne Elektronen-selbstenergiegraphen, das Renormierungsprogramm abgeschlossen. Bei der Renormierung haben wir für den Austauschterm M_n immer den vollen Operator betrachtet. Streng genommen gilt sie also nicht für den nach Gl. (23) genäherten Operator. Wenn aber die Näherung für den Operator gut ist, wird auch der Fehler von der Renormierung her klein sein.

Weiterhin ist es überraschend, daß es nicht gelungen ist, die Renormierung von V_n und M_n durch eine Renormierung der Ladung e alleine auszudrücken, wie das bei der vollständigen Schwingergleichung (12) noch möglich ist⁵⁾. Aber wir haben ja eine Näherung eingeführt, indem wir den Photonen-

propagator mit $D=D_0$ festhielten und für die Dreipunktfunktion $\Gamma^l = \int \delta(x-\frac{1}{2}) \delta(y-\frac{1}{2})$ setzten. Diese Näherung wirkte bloß auf den Term, der dann in Gleichung (18) zum sogenannten Austauschterm führte. Gerade dieser Term aber hat auf dem Wege der Näherung einige von seinen ursprünglichen Renormierungseigenschaften verloren. Betrachten wir zum Beispiel eine Theorie nur mit dem Austauschterm alleine.

$$(78) \quad \text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---}$$

Dafür läßt sich mit Gl. (56) und $V_n=V_0$ (für alle n) ableiten, daß die Divergenz im n -ten Iterationsschritt in der Form $(\sum_{k=1,n} A_k) V_0$ abgespalten werden kann. Das ist in keiner Weise durch eine Renormierung der Ladung e auszudrücken.

Als letztes ist noch zu bemerken, daß der Renormierungsbe-
weis eine Entwicklung in Feynmangraphen benutzte und dabei
auch in Potenzen des äußeren Feldes entwickelte (s. Gl. (39)).
Das ist sicherlich erlaubt für $Z\alpha < 1$. Für eine Punktladung mit $Z\alpha=1$ hat die Theorie einen singulären Punkt; hier konvergiert die Entwicklung in Potenzen des äußeren Feldes nicht mehr. Da sich aber die Ergebnisse des Renormierungsverfahrens geschlossen (d.h. ohne irgendeine Störungsentw.) darstellen lassen, nehmen wir an, daß sich diese Ergebnisse analytisch um die Singularität für Punktladungen mit $Z\alpha=1$ herum in das Gebiet ausgedehnter Ladungen mit $Z\alpha > 1$ hinein fortsetzen lassen.

VI. Zusammenfassung

In Kapitel I wurde herausgearbeitet, daß die Diracgleichung zur Berechnung der Elektronenzustände in starken äußeren Feldern keine gute Näherung ist. Als bessere Näherung wurde in Kapitel III die selbstkonsistente Gleichung (15) vorgeschlagen, die ein Elektronenfeld beschreibt, das im Gleichgewicht mit dem von ihm erzeugten elektrischen Feld und dem äußeren Feld steht. Diese Gleichung konnte auch als Näherung von der Schwingergleichung (12) erhalten werden (Gl.(18)). Für den komplizierten Integraloperator im Austauschterm der Gl. (18) wurde eine Entwicklung in Differentialoperatoren vorgenommen, Gl. (22) .. Für rotationsinvariante Potentiale ließ sich das Problem durch Einführung von Wellenfunktionen mit gutem Drehimpuls vereinfachen. Dies ist in Kapitel IV durchgeführt worden. Schwieriger war die Renormierung der Theorie, die in Kapitel V abgehandelt ist.

Die wichtigste Aufgabe für die Zukunft ist die Berechnung des ersten Iterationsschrittes; d.h. man setzt die Lösungen der Diracgleichung mit äußerem Feld in die Korrekturterme ein. Das interessanteste Ergebnis dieser Prozedur wird sein, daß man die Größenordnung der auftretenden Effekte kennenlernt. Weiterhin kann man die Güte der Näherung für den Austauschterm und die Bedeutung des Austauschterms überhaupt prüfen. Eine weitere interessante Aufgabe für die Zukunft ist, den Einfluß der Näherung $D=D_0$ für den Photonenpropagator zu studieren. Dazu setzt man die Greensfunktion des ersten Iterationsschrittes in die Schwingergleichung für das Photon ein. Dann wäre nachzuprüfen, wie stark der geänderte Photonenpropagator die elektromagnetischen Übergangswahrscheinlichkeiten und die Elektronengreensfunktion beeinflusst. Bei der Untersuchung dieses Problem es kommen neue Renormierungsschwierigkeiten auf uns zu.

Referenzen

- 1) U. Mosel, W. Greiner : Z.Phys. 217 (1968) 256
U. Mosel Dissertation Frankfurt 1968
S.G. Nilsson, J.R. Nix, A. Sobczewski, Z. Szymanski,
S. Wycack, C. Gustafson and P. Möller :
Nucl.Phys. A115 (1968) 545
- 2) J.M. Jauch, F. Rohrlich Theory of photons and
electrons Reading 1959
- 3) S.S. Schweber An introduction to relativistic
quantum field theory Evanston 1968
- 4) S. Björken, D. Drell Relativistische Quantenmechanik
und Relativistische Quantenfeldtheorie
Mannheim 1966
- 5) N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov Introduction to the
theory of quantized fields New York 1959
- 6) O. Klein : Z.Phys. 53 (1929) 157
- 7) F. Beck, H. Steinwedel, G. Süssmann :
Z.Phys. 171 (1963) 189
- 8) W. Pieper, W. Greiner : Z.Phys. 218 (1969) 327
D. Rein : Z.Phys. 221 (1969) 423
- 9) B. Fricke persönliche Mitteilung

- 10) A.B. Layzer : P.R. 129 (1963) 897
- 11) P.-G. Reinhard : Lettere al Nuove Cimento 1.3 (1970) 313
- 12) M.E. Rose Relativistic electron theory
New York , London 1961
- 13) A. DeShalit, I. Talmi Nuclear shell theory
New York 1963
- 14) M. Danos, L.C. Maximon : J.Math.Phys. 6 (1965) 766
- 15) F. Hund Materie als Feld Berlin-Göttingen-Heidelberg
1954
- 16) M. Rotenberg, R. Divins, N. Metropolis, J.K. Wooten
The 3-j and 6-j Symbols Cambridge Massachussets 1959

Erläuterungen zu den Figuren :

Fig. I.1 zeigt den Verlauf des $1s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ Bindungszustandes in Abhängigkeit von der Feldstärke. Bei A liegt ein Gebiet schwacher Felder, bei B eines starker Felder. Die beiden Linien F_1 und F_2 sind die Fermilinen zur Ladung 0, bzw. 2 .

Fig. I.2 zeigt die radiale Dichteverteilung $\psi(r) r^2$ einer $4s_{1/2}$ Wellenfunktion für einen Kern der Ladung $Z=164$ und mit dem Radius 10fm. Der Abstand zum Kernmittelpunkt r ist im logarithmischen Maßstab aufgezeichnet. Das erste, betonte, Maximum liegt bei 25fm.

Zu den graphischen Darstellungen von Integralgleichungen in Fig. II.1, Fig II.2 und Fig. III.1 gelten folgende Konventionen:

	Elektronengreensfunktion $G(x,y)$
	Greensfunktion eines freien Elektrons
	Photonengreensfunktion $D(x,y)$
	Greensfunktion eines freien Photons
	Dreipunktfunktion(Vertexfunktion) Γ
	äußeres Feld $A_\mu(x)$

Fig. II.1 ist die graphische Darstellung der Gl.(II.6b), die die Greensfunktion eines Elektrons im äußeren Feld bestimmt, und der Gl.(II.6c), die die Entwicklung von Gl.(II.6b) in freie Elektronenpropagatoren ist.

Fig. II.2 ist die graphische Darstellung der Schwinger-Gleichung (II.11). Es sind drei Gleichungen; die Erste für die Elektronengreensfunktion; die Zweite für die Photonengreensfunktion und die Letzte für die Dreipunktfunktion Γ . Die Gleichung für Γ kann nicht geschlossen, sondern nur als Entwicklung in Potenzen von α , angegeben werden.

Fig. III.1 ist die graphische Darstellung der Gleichung (III.6), die als Näherung von der Schwinger-Gleichung (II.11) erhalten wurde. Man bemerke beim Vergleich mit Fig. II.2, daß nur der letzte Term gegenüber der Schwinger-Gleichung für das Elektron geändert ist.

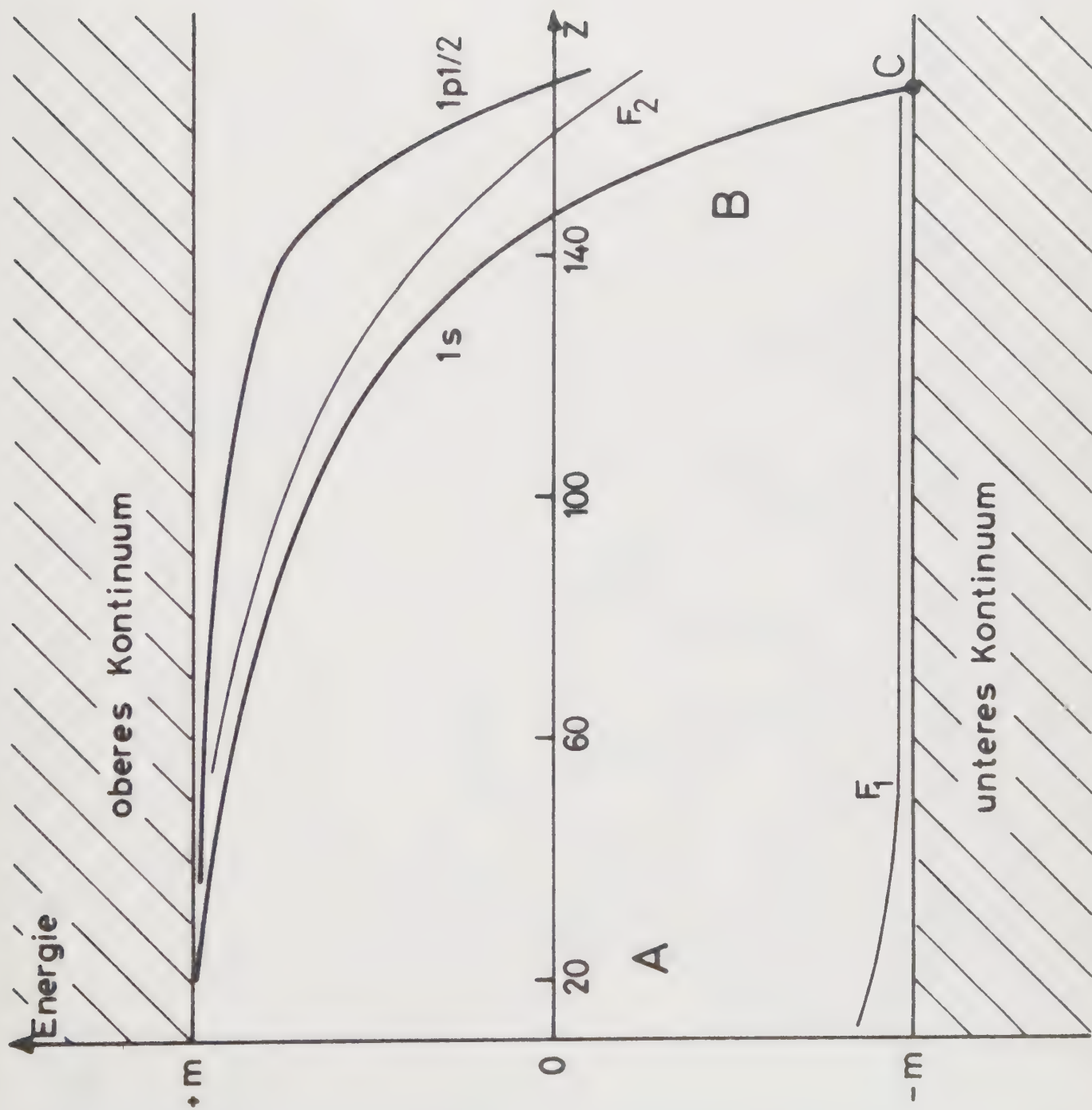


Fig.1

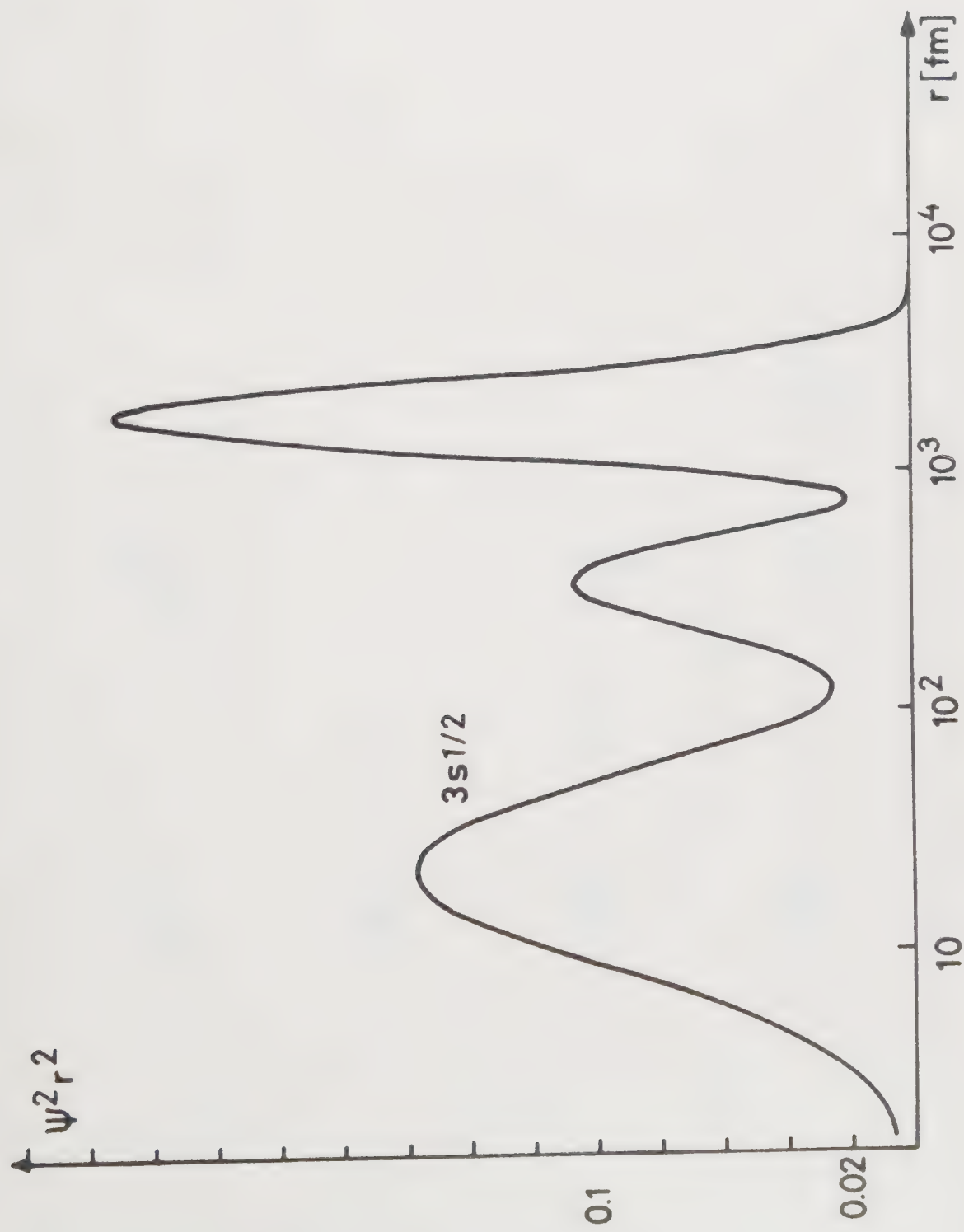
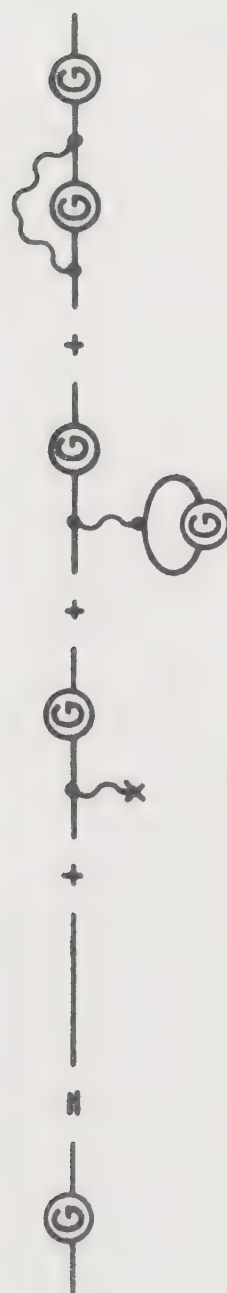


Fig. 2



Fig. 3



உதிர்த்து

Herrn Prof. W. Greiner bin ich zu grossem Dank verpflichtet für die Anregung zu dieser Arbeit und das grosse Interesse, das er ihr entgegenbrachte.

Des weiteren möchte ich meinen Kollegen Dr.H. Arenhövel und Dr.L. Fulcher für viele anregende und klärende Diskussionen danken.

Lebenslauf

Am 6.10.1945 wurde ich in Lohr/Main geboren als Sohn des Buchhändlers Paul Reinhard und seiner Ehefrau Charlotte Reinhard, geb. Langhammer. Ab Herbst 1951 besuchte ich die evangelische Volksschule in Lohr/Main und anschließend ab Herbst 1955 das dortige Gymnasium. Im Herbst 1956 kam ich nach Frankfurt in die Sexta des Lessinggymnasiums, wo ich im Februar 1965 mit dem Abitur abschloß. Im Sommersemester 1965 begann ich an der J.W. Goethe Universität in Frankfurt das Studium der Physik, das ich im Mai 1968 mit dem Diplom beendete. Meine Diplomarbeit fertigte ich im Institut für theoretische Physik unter Leitung von Professor Dr. W. Greiner an. Seit Mai 1969 bin ich an diesem Institut als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle tätig.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren Martienssen, Bauer, Salzmann, Köthe, Süssmann, Bilz und Greiner.

